



TITLE:

# 二層磁性流体における表面波と界面波の相互作用(流体における波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

水田, 洋

---

CITATION:

水田, 洋. 二層磁性流体における表面波と界面波の相互作用(流体における波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1994, 866: 263-276

ISSUE DATE:

1994-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83925>

RIGHT:

## 二層磁性流体における表面波と界面波の相互作用

北大工学部 水 田 洋 (Yo Mizuta)

### 1 はじめに

水・ケロシンなどの母液中にマグネタイトの微粒子を拡散させた磁性流体は、それ自身の磁化を通して磁場に感應するという性質で特徴づけられる。磁性流体は電氣的には絶縁的であって、導電性ゆえにその中を流れる電流による Lorentz 力を通して電磁場と相互作用する電磁流体とは対比される。

磁性流体に及ぼす磁場の作用は透磁率が不連続的に変わる表面または界面において顕著で、その効果が端的に現れるのが波動である。このような波動の分散関係と安定性は、Cowley と Roswensweig[1] により最初に論じられ、その後 Zelazo と Melcher[2] を始めとする多くの研究で詳しく調べられている。これらの対象は、水平または鉛直の直流磁場のもとで、水平または鉛直加振を与えたときの表面波であった。これに対し、加振をせず、交流磁場と表面波の共鳴を調べた研究もある [3]。

本稿では、前報 [4] に引き続き、密度・透磁率を異にする 2 種類の流体による表面波・界面波の理論解析について述べる。ここでは主に、表面波または界面波と交流磁場との共鳴的な相互作用、および表面波と界面波同士の相互作用について論じることとする。

### 2 二層磁性流体に対する Normal Mode 方程式

変動する磁場などの作用のもとで、相互作用しつつ変動する磁性流体の自由表面と密度界面の変位を  $\eta(y, t)$ ,  $\zeta(y, t)$  とする。  $\eta(y, t) = \sum_k e^{iky} \eta_k(t)$ ,

$\zeta(y, t) = \sum_k e^{iky} \zeta_k(t)$  のように波数成分  $\eta_k(t), \zeta_k(t)$  に分解すると, それらの時間変化は, 時間に関して 2 階の連立常微分方程式である normal mode 方程式で記述できる [4].

$$\begin{pmatrix} t_2 & -\Delta \\ -\Delta & t_1 + t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_k \\ \ddot{\zeta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_s & 0 \\ 0 & g_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{sk} \\ T_{ik} \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

$$t_{1,2} \equiv \rho_{1,2} / (k \tanh kh_{1,2}), \quad g_s \equiv \rho_2 g(t) + k^2 \gamma_s,$$

$$\Delta \equiv \rho_2 / (k \sinh kh_2), \quad g_i \equiv (\rho_1 - \rho_2) g(t) + k^2 \gamma_i.$$

ここでは, 密度・流体厚・重力加速度を含む単位体積あたりの外力・表面張力係数または界面張力係数を  $\rho, h, g(t), \gamma$  と置き, 下層・上層・表面・界面に関する量を添え字 1, 2, s, i で表している.

この方程式は, 密度と透磁率の異なる磁性流体各層の非圧縮性・非回転性・非粘性を仮定して, 表面・界面における運動学的条件・力学的条件および底面条件を  $\eta, \zeta$  および速度ポテンシャルについて線形化した後に波数成分に分解し, 速度ポテンシャルの波数成分を消去して導かれる. 表面・界面などの境界面では, 圧力・表面張力または界面張力・法線ベクトル・磁気応力テンソル・その法線法線成分・Kronecker のデルタを  $p, p_t, (n_i), (T_{ij}), T_{nn}, \delta_{ij}$  で, 境界面をはさむ物理量の跳びを  $[\dots]$  のように表せば, 運動量法線成分の連続性から界面条件

$$(p_t)_{s,i} = [n_i(T_{ij} - p\delta_{ij})n_j]_{s,i} = [T_{nn} - p]_{s,i}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} z = \eta + h_2: & [p]_s = -p_2, \quad (p_t)_s = -\gamma_s \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right), \\ z = \zeta: & [p]_i = p_2 - p_1, \quad (p_t)_i = -\gamma_i \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

が導かれるが, 力学的条件は, これと一般化された Bernoulli の定理

$$\frac{\partial(\Phi_{1,2} + p_{1,2})}{\partial x_i} = \frac{\partial(T_{1,2})_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

$$\longrightarrow \Phi_{1,2} + p_{1,2} = \text{const.}, \quad (4)$$

$$\Phi \equiv \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - \Omega \right),$$

$$\begin{cases} z = \eta + h_2: & \Omega_2 = -g(t)(\eta + h_2), \\ z = \zeta & : \Omega_{2,1} = -g(t)\zeta \end{cases}$$

の(4)との間で  $p$  を消去したものである。ここで  $\phi, v, \Phi, \Omega$  は流速ポテンシャル・流速の大きさ・Bernoulli 関数・外力ポテンシャルである。

磁束密度・磁場を  $\mathbf{B} = (B_i)$ ,  $\mathbf{H} = (H_i)$  とすれば, 磁気応力テンソルは  $T_{ij} = H_i B_j - \int_0^H B dH \delta_{ij}$  と表される [5]. 磁場があるとき, 式(3)第3辺は自明ではないが,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  と  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  を用い, 更に  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  ( $\mu$ :透磁率) を仮定すれば, 第3辺が示される. 同じ仮定のもとで, 式(2)の磁気応力差  $[T_{nn}]$  は磁束密度の法線・接線成分  $B_{n,t}$  と磁場の法線・接線成分  $H_{n,t}$  で  $[B_n H_n - B_t H_t]/2$  と書き換えられる。

透磁率  $\mu$  がその両側で異なる境界面に加えた磁場により生じる  $[T_{nn}]$  は, 境界面が動けば, 磁束密度や磁場の摂動  $b, h$  のために変化する. その変化量を  $\eta, \zeta$  と同じオーダーの量について線形化して波数成分に分けたのが, 式(1)の  $T_{sk}, T_{ik}$  である. 境界面における  $B_n$  と  $H_t$  の連続条件から導いた境界条件のもとで磁気ポテンシャルの Laplace 方程式を解いて  $b, h$  を求め, これらで  $T_{sk}, T_{ik}$  を表すと,

$$\begin{cases} T_{sk} = G_1 \eta_k + (G_3 \pm i G_4) \zeta_k, \\ T_{ik} = (G_3 \mp i G_4) \eta_k + G_2 \zeta_k \end{cases} \quad (5)$$

となる. ここで, 磁場作用係数  $G_{1,2,3,4}$  は次のように定義されている.

$$G_1 \equiv \frac{k}{\mu_0} \frac{\bar{\mu}_2 (f_{11} + \bar{\mu}_2 f_{21} \tanh k h_2) [H]_s^2 - (f_{11} \tanh k h_2 + \bar{\mu}_2 f_{21}) [B]_s^2}{f},$$

$$G_2 \equiv \frac{k}{\mu_0} \frac{f_{11} f_{12} [H]_i^2 - f_{21} f_{22} [B]_i^2}{f},$$

$$G_3 \equiv \frac{k}{\mu_0 \cosh k h_2} \frac{\bar{\mu}_2 (f_{11} [H]_i [H]_s - f_{21} [B]_i [B]_s)}{f},$$

$$G_4 \equiv \frac{k}{\mu_0 \cosh kh_2} \frac{\bar{\mu}_2(f_{11}[H]_i[B]_s + f_{21}[B]_i[H]_s)}{f},$$

$$f_{11} \equiv \bar{\mu}_1(\bar{\mu}_1 \tanh kh_1 + 1), \quad f_{21} \equiv \bar{\mu}_1 + \tanh kh_1,$$

$$f_{12} \equiv \bar{\mu}_2(\bar{\mu}_2 \tanh kh_2 + 1), \quad f_{22} \equiv \bar{\mu}_2 + \tanh kh_2,$$

$$f \equiv f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21}.$$

ただし、真空透磁率 $\mu_0$ で規格化した各層の比透磁率を $\bar{\mu}_{1,2}$ 、無摂動状態での境界面における磁束密度の水平成分 $B_t$ と磁場の鉛直成分 $\mu_0 H_n$ の跳びを $[B] \equiv [B_t] = [\mu]H_t$ ,  $[H] \equiv [\mu_0 H_n] = [1/\mu]B_n$ と表した。通常流体では $\bar{\mu} = 1$ であり、このために $[B]$ と $[H]$ は0となる。式(5)を式(1)に代入すれば、normal mode 方程式の最終的な形

$$\begin{pmatrix} t_2 & -\Delta \\ -\Delta & t_1 + t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_k \\ \ddot{\zeta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_s - G_1 & -(G_3 \pm iG_4) \\ -(G_3 \mp iG_4) & g_i - G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

が得られる。

### 3 Normal Mode 方程式の性質

normal mode 方程式を

$$A\ddot{u} + Bu = 0, \quad u \equiv \begin{pmatrix} \eta_k \\ \zeta_k \end{pmatrix} \quad (7)$$

のように表すと、実対称な $A$ は振動方程式の質量行列、エルミート対称な $B$ は復元力行列に相当する。磁場がなければ $B$ は対角的になり、表面と界面は $A$ 中の $\Delta$ だけを通じて相互作用する。しかし磁場があれば、 $B$ の対角項に、磁場が表面・界面に及ぼす直接作用を表す $G_{1,2}$ が現れると共に、非対角項には、磁場を介しての表面と界面の相互作用を表す $G_{3,4}$ が現れる。

磁場作用係数は  $k, h_{1,2}, \bar{\mu}_{1,2}, [H]_{s,i}, [B]_{s,i}$  を含む. いずれも  $[H]_{s,i}, [B]_{s,i}$  に関して2次で, それらの係数の値は,  $k/\mu_0$  あるいは  $\cosh kh_2$  を除けば, 0 から 1 の範囲にある.

$h_2 \rightarrow \infty$  とすれば  $\Delta, G_{3,4} \rightarrow 0$  となるので, 表面波と界面波は分離される. この場合の表面波モードと界面波モードの分散関係は  $\eta_k, \zeta_k \propto e^{-i\omega t}$  により,

$$\begin{cases} \text{表面波モード: } \omega = \sqrt{(g_s - G_1)/t_2}, \\ \text{界面波モード: } \omega = \sqrt{(g_i - G_2)/(t_1 + t_2)} \end{cases} \quad (8)$$

となる.

$G_{1,2}$  では, 磁場の鉛直成分の2乗が正の, 水平成分の2乗が負の寄与をする. したがって, 鉛直成分/水平成分が増加すれば, 表面波モードと界面波モードの固有周波数は減少/増加する.

磁場作用係数の波数依存性は, 小さな  $k$  で  $G_{1,2,3,4}$  はいずれも増加するが,  $G_{3,4}$  はその後  $\Delta$  と同様,  $k$  または  $h_2$  の増加と共に急速に減少する. これを復元力係数  $g_{s,i}$  と共に示したのが図1左である. またこの図の右は, 鉛直磁場 (MGF) がない時 (OFF) とある時 (ON) の表面波モード (SUR) と界面波モード (INT) の分散関係である (相互作用を含む). パラメーターの値は次の通り.  $h_1 = 0.020\text{m}$ ,  $h_2 = 0.015\text{m}$ ,  $\rho_1 = 1.2\rho(\text{水})$ ,  $\rho_2 = 1.0\rho(\text{水})$ ,  $\gamma_s = 0.026\text{N/m}$ ,  $\gamma_i = 0.012\text{N/m}$ ,  $\bar{\mu}_1 = 1.4$ ,  $\bar{\mu}_2 = 1.2$ .

磁場については, 一様な鉛直交流磁場を想定して  $(B_n)_s = (B_n)_i = 0.05\text{T}$ ,  $(\mu_0 H_t)_s = (\mu_0 H_t)_i = 0.00\text{T}$  とする. この鉛直成分は交流成分の振幅を表す. また図1左で  $G_4 = 0$  となるのは, 水平成分が0であることによる.

鉛直磁場を増やすと  $G_{1,2}$  が  $g_{s,i}$  に近づき, ある程度以上では,  $G_{1,2}$  と  $g_{s,i}$  の値が逆転する波数領域が存在するようになるが, これが分散関係に見られる固有周波数の低下や, 固有周波数が虚数となって生じる Rayleigh-Taylor 不安定性 [5] の原因となる. これは直流磁場に限らず, 今のような交流磁場に

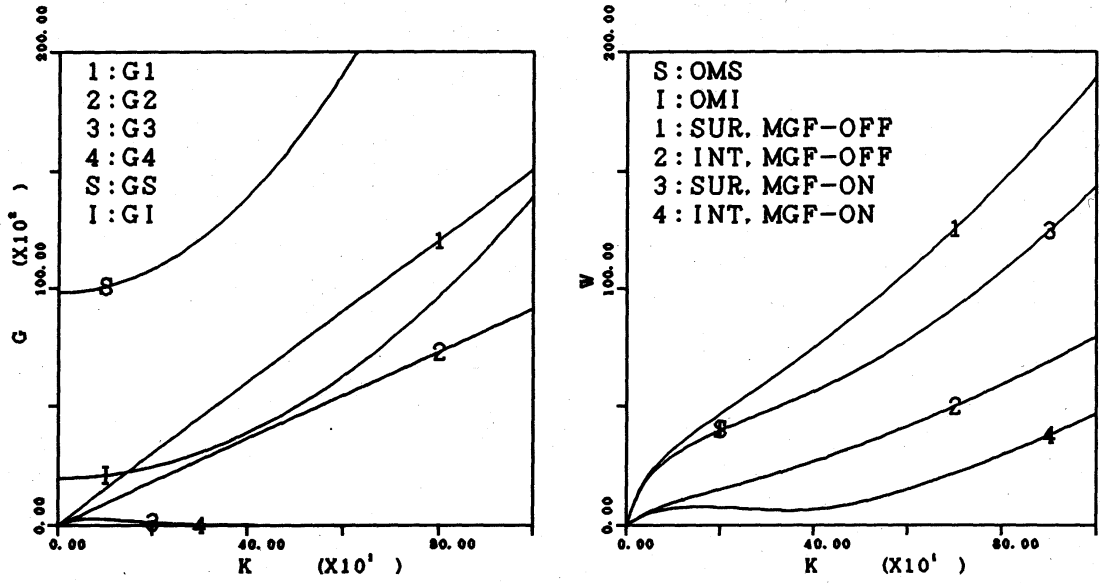


図 1: 復元力係数・磁場作用係数の波数依存性 (左) と分散関係 (右)

も当てはまる.

normal mode 方程式からは, エネルギー保存則

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[ t_1 \frac{|\dot{\eta}_k|^2}{2} + (t_1 + t_2) \frac{|\dot{\zeta}_k|^2}{2} - \Delta \operatorname{Re}(\dot{\eta}_k^* \dot{\zeta}_k) \right. \\
 & \quad \left. + (g_s - G_1) \frac{|\eta_k|^2}{2} + (g_i - G_2) \frac{|\zeta_k|^2}{2} - \operatorname{Re}(G_3 - iG_4) \eta_k^* \zeta_k \right] \\
 & = (\dot{g}_s - \dot{G}_1) \frac{|\eta_k|^2}{2} + (\dot{g}_i - \dot{G}_2) \frac{|\zeta_k|^2}{2} - \operatorname{Re}(\dot{G}_3 - i\dot{G}_4) \eta_k^* \zeta_k
 \end{aligned} \quad (9)$$

が導かれる. 左辺の被微分項は順に, 表面波および界面波の運動エネルギー, 表面波と界面波の力学的相互作用エネルギー, 表面波および界面波のポテンシャルエネルギー, 表面波と界面波の磁氣的相互作用エネルギーにあたる. また右辺は, 外力や磁場の時間変化によるエネルギーの出入りを表している.

#### 4 結合 Mathieu 方程式への還元

外力は一定だが, 磁場に直流成分と交流成分があって  $H = H_0 + H_1 \cos \Omega t$  と表される場合,  $[H]_{s,i}, [B]_{s,i}$  に関して 2 次の  $G_{1,2,3,4}$  は, それぞれ磁場の直流

直流, 直流交流, 交流交流成分の積から成る項に分けられるため, 復元力行列を  $\cos \Omega t$  のべきで

$$B = B_{00} + (B_{10} + B_{01}) \cos \Omega t + B_{11} \cos^2 \Omega t \quad (10)$$

と表すことができる.

いま磁場の直流成分と交流成分は同時には存在しないとして  $B_{10,01}$  を落とし, 式 (10) を式 (7) に代入する. 更にこれの両辺に行列  $XA^{-1}$  ( $X$  は以下で定義する) をかけて,

$$(X\ddot{u}) + (XA^{-1}BX^{-1})(Xu) = 0 \quad (11)$$

または

$$\ddot{v} + (P - 2Q \cos 2t)v = 0, \quad v \equiv Xu = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \quad \Omega t \rightarrow t \quad (12)$$

と変形すると, これは, Mathieu 方程式を 2 成分系に拡張した結合 Mathieu 方程式となっている.

ここで  $P$  と  $Q$  は,

$$P \equiv \frac{1}{\Omega^2} XA^{-1} \left( B_{00} + \frac{1}{2} B_{11} \right) X^{-1} = \frac{1}{\Omega^2} \begin{pmatrix} \omega_s^2 & 0 \\ 0 & \omega_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$Q \equiv -\frac{1}{4\Omega^2} XA^{-1} B_{11} X^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (14)$$

のように定義した.  $X$  は  $P$  が対角化されるように決めるので, 式 (13) は  $X$  の定義式とも言える. このときの固有値  $\omega_{s,i}$  は交流成分がないときの表面波モード, 界面波モードの固有周波数, 固有ベクトル成分  $p_k, q_k$  はこれらのモードの振幅となる. 式 (13) が示すように, 交流磁場はその実効値が, 固有周波数に直流磁場と同様な影響を与える. 磁場がなければ  $\omega_{s,i}$  は実数で波動は安定であるが, 磁場があると  $\omega_{s,i}^2$  が負や更に複素量となって, 波動は不安定になる.



## 5 結合 Mathieu 方程式の解析解

Mathieu 方程式の性質や解法については文献 [6] がよく知られているが、本節では、結合 Mathieu 方程式の計算機向けの解法を述べる。ただし方程式の解を求めること自身は、normal mode 方程式を 1 階の連立常微分方程式で置き換えて 4 次の Runge-Kutta 法で直接積分する方がより簡単で汎用性もあるので、ここに述べる方法はむしろ、結合 Mathieu 方程式の安定性ダイアグラムを得るために利用している。

Floquet の定理に基づいて、式 (12) の解の形を

$$v(t) = e^{\mu t} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt) \quad (15)$$

と仮定して式 (12) に代入し、 $\cos mt$ ,  $\sin mt$  の係数を 0 と置く。ただし  $\mu$  は特性指数、 $a_m, b_m$  は方程式が 2 元であるのにあわせて 2 成分の展開係数ベクトルである。その結果は、 $A_m, B_m, C_m$  を  $\mu, m, p_1, p_2, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$  を含む表 1 のような 4 行 4 列の正方係数行列として

$$0 = B_m \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} - A_m \begin{pmatrix} a_{m-2} \\ b_{m-2} \end{pmatrix} - C_m \begin{pmatrix} a_{m+2} \\ b_{m+2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

のようにまとめられる。これは  $m = 0$  または  $m = 1$  から始まる漸化式であるが、

$$\begin{pmatrix} a_{m\pm 2} \\ b_{m\pm 2} \end{pmatrix} = R_{m\pm 2}^{\pm} \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}, \quad R_{m-2}^{-} = (B_{m-2} - A_{m-2} R_{m-4}^{-})^{-1} C_{m-2}, \\ R_{m+2}^{+} = (B_{m+2} - C_{m+2} R_{m+4}^{+})^{-1} A_{m+2}$$

で定義される昇降行列  $R_{m\pm 2}^{\pm}$  を用いると、式 (16) は、帰納的に求められる行列  $\Gamma_m, \Delta_m$  により、 $m$  が同一な  $a_m, b_m$  に関する次の形に書き換えられる。

$$0 = (B_m - \Gamma_m - \Delta_m) \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (17)$$

表 1: 結合 Mathieu 方程式の漸化式に対する係数行列

$m$	$B_m$	$A_m$	$C_m$
0	$\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} S_1 - Q & 2\mu 1 \\ -2\mu 1 & S_1 + Q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} S_2 & 4\mu 1 \\ -4\mu 1 & S_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2Q & 0 \\ 0 & 0Q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$
$3 \leq$	$\begin{pmatrix} S_m & 2\mu m 1 \\ -2\mu m 1 & S_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

$$S_m \equiv P + (\mu^2 - m^2)1$$

$$\Gamma_m \equiv A_m R_{m-2}^- = A_m (B_{m-2} - \Gamma_{m-2})^{-1} C_{m-2},$$

$$\Delta_m \equiv C_m R_{m+2}^+ = C_m (B_{m+2} - \Delta_{m+2})^{-1} A_{m+2}.$$

これより, 非 0 なる解を得る条件として

$$0 = |B_m - \Gamma_m - \Delta_m| \equiv R_m(\mu, p_1, p_2, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}) \quad (18)$$

が導かれる.

与えられた  $P, Q$  のもとで式 (12) を解く場合の式 (18) の使い道は,  $\mu$  を決めることである.  $R_{m\pm 2}^\pm$  は  $\mu$  を含むので,  $\mu$  が決まれば,  $a_0, b_0$  あるいは  $a_1, b_1$  から, 式 (15) における  $a_m, b_m$  を必要なだけ求めることができる.

結合 Mathieu 方程式の解は,  $P, Q$  の成分の値次第で安定にも不安定にもなる.  $\mu$  が純虚数である限り  $v(t)$  は安定ということができるが, 正の実部を持つようになると不安定になる. Hill の行列式を用いた議論によれば, 安定・不安定の境界で  $\mu$  は 0 または  $i$  である [6]. これらの  $\mu$  を式 (18) に代入して得られる  $p_1, p_2, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$  の間の関係式からは, 安定性ダイヤグラム

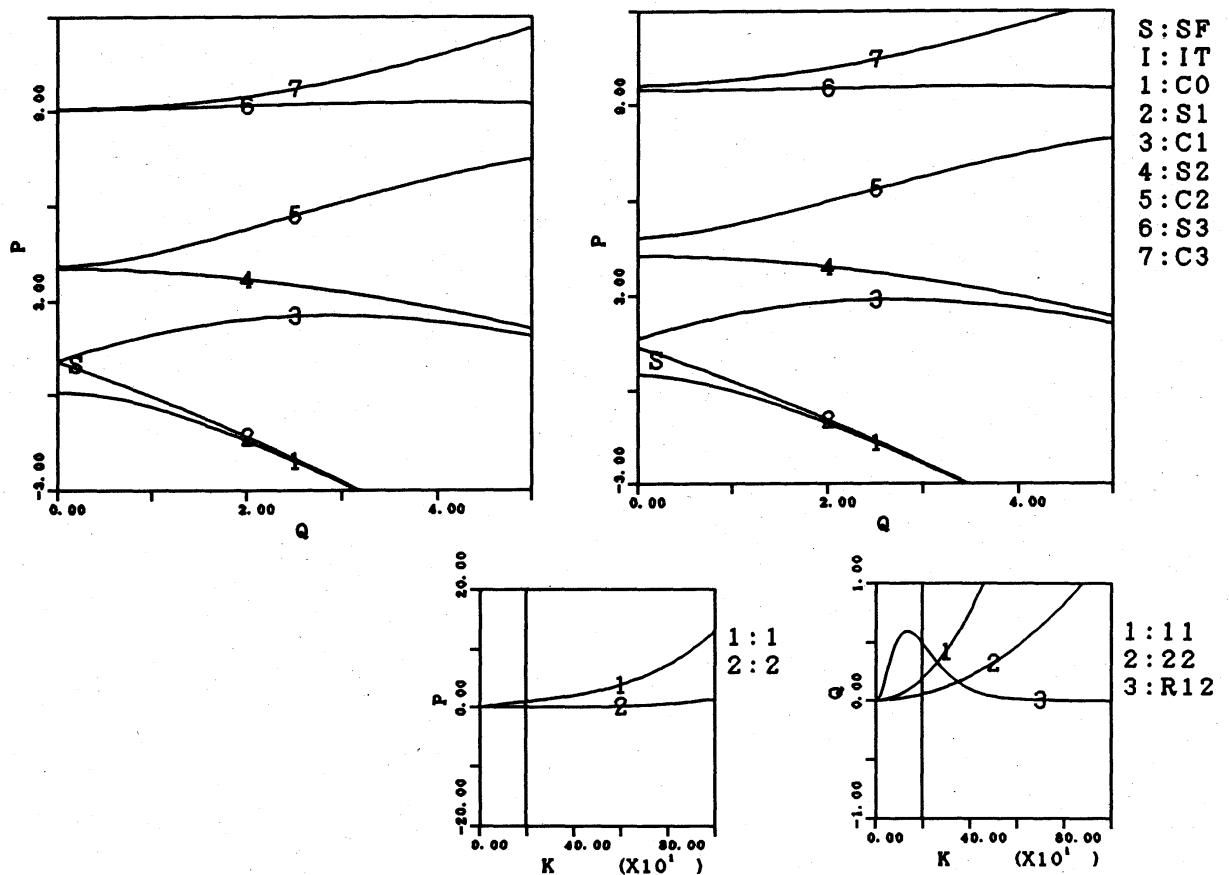


図 2: 結合 Mathieu 方程式における界面波モードの安定性ダイアグラム

の安定・不安定領域の境界を定めることができる。これは、式 (18) のもうひとつの使い道である。

式 (18) の  $R_m$  は 4 行 4 列の行列式で、指定した  $m, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$  に対し、表面波モード・界面波モードそれぞれの対称解・反対称解に対応する 4 本の分枝が得られる。図 2 は、 $q_{22}$  と  $p_2$ 、すなわち界面波モードに関する安定性ダイアグラムである。凡例の C, S はそれぞれ対称解・反対称解を、その後の数字は  $m$  を示し、 $m$  が共通な対称解と反対称解の間が不安定領域となる。不安定領域は  $q$  を増すにつれて、 $p_2 = n^2$  ( $n$ : 整数) すなわち  $\Omega = \omega_i/n$  付近から広がる。表面と界面の間が充分遠く相互作用が無視できれば、同図左のような通常の Mathieu 方程式に対する安定性ダイアグラムを用いて、表面波モードとは独立に安定性を論じることができ、これは表面波モードにつ

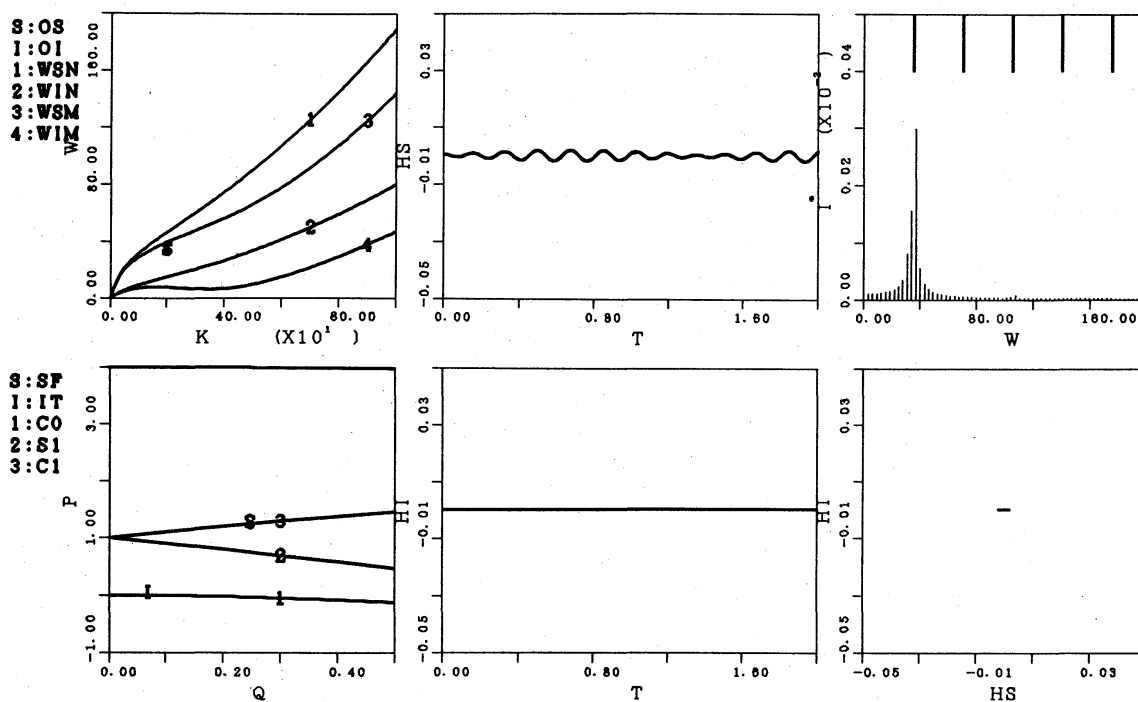


図 3: Normal Mode 方程式の数値解:  $\Omega = 35.0 \text{ s}^{-1}$

いても同様である。しかし相互作用が効くようになると、安定性ダイアグラムは同図右のように変化する。例えば  $q_{22} = 0$  であっても、不安定領域は一点にならない。右下の図は、 $P$  および  $Q$  各成分の波数依存性である。縦線は、次節の数値解に用いた  $k = 200.0 \text{ m}^{-1}$  の位置であるが、相互作用を表す  $q_{12}$  はこの付近で相対的に大きい。

## 6 Normal Mode 方程式の数値解

表面波モード・界面波モードの周波数  $\omega_{s,i}$  や安定性ダイアグラムの  $p$  を意識しながら、交流磁場の周波数  $\Omega$  を何通りか与え、数値的に normal mode 方程式を解いた結果を図 3-5 に示す。各図の左上、左下は、鉛直交流磁場なし (N)・あり (M) の分散関係および安定性ダイアグラム上に、表面波モード (S)・界面波モード (I) に関する  $(k, \Omega)$  と  $(q, p)$  を示したものである。中上、

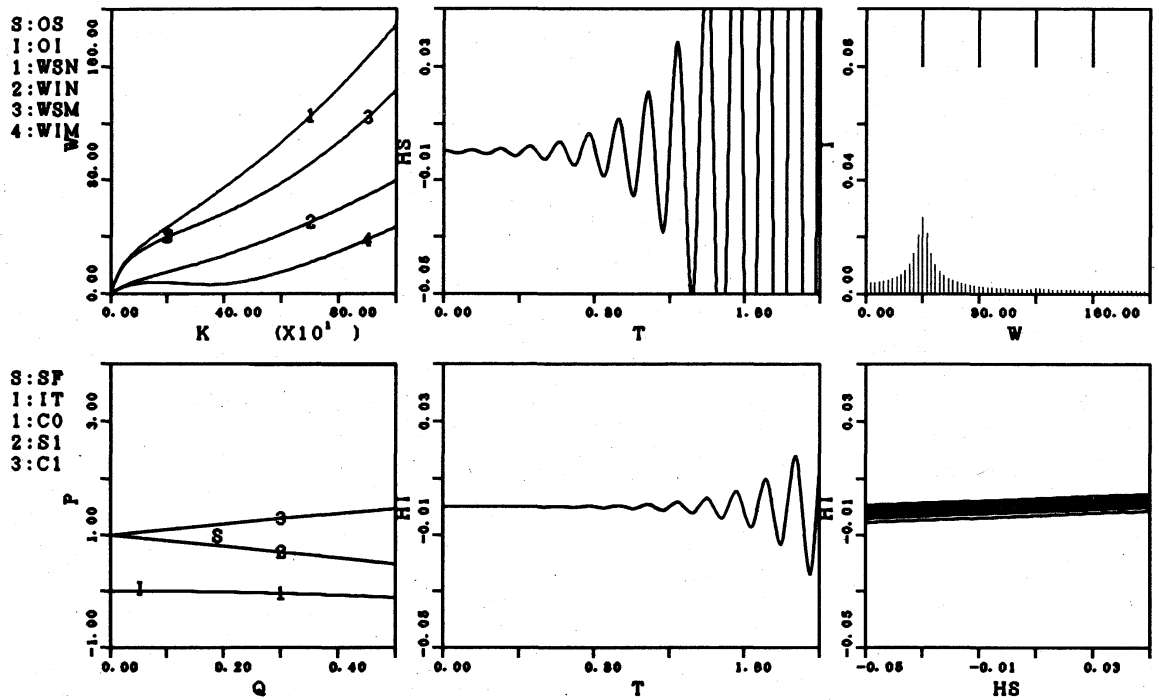


図 4: Normal Mode 方程式の数値解:  $\Omega = 40.0 \text{ s}^{-1}$

中下は, normal mode 方程式の解  $\eta_k, \zeta_k$  の時間変化で, それらの位相関係は横軸を  $\eta_k$ , 縦軸を  $\zeta_k$  とする位相マップで右下に示されている. 右上は  $\eta_k$  (図 3, 4) または  $\zeta_k$  (図 5) の強度スペクトルで, 交流磁場の周波数との関係を見るため,  $n\Omega$  の位置を上部に記入した. 図 3 で  $\Omega$  は, 表面波モードに関して安定・不安定領域の境界上にある. 界面は静穏であるが, 表面はビートを打ちながら安定に振動し, スペクトルでは  $3\Omega$  付近にも弱い成分がある.

図 4 で  $\Omega$  は, 表面波モードに関して不安定領域内に入る. このため表面振動の振幅は, 交流磁場に共鳴して時間と共に増大し, 相互作用を通じた界面振動がこれに続くことになる. 表面振動と界面振動の位相はややずれる. また図 3 に較べ, スペクトルのピーク位置はもっと  $\Omega$  に一致する.

図 5 では,  $\Omega$  を界面波モードに関する不安定領域内に入れた. このため図 4 とは逆に, 先に起きた界面振動が表面振動を誘起している.  $\Omega$  を界面振動に共鳴させる場合は, 効果が現れるまでにより長い時間がかかるが, その効果

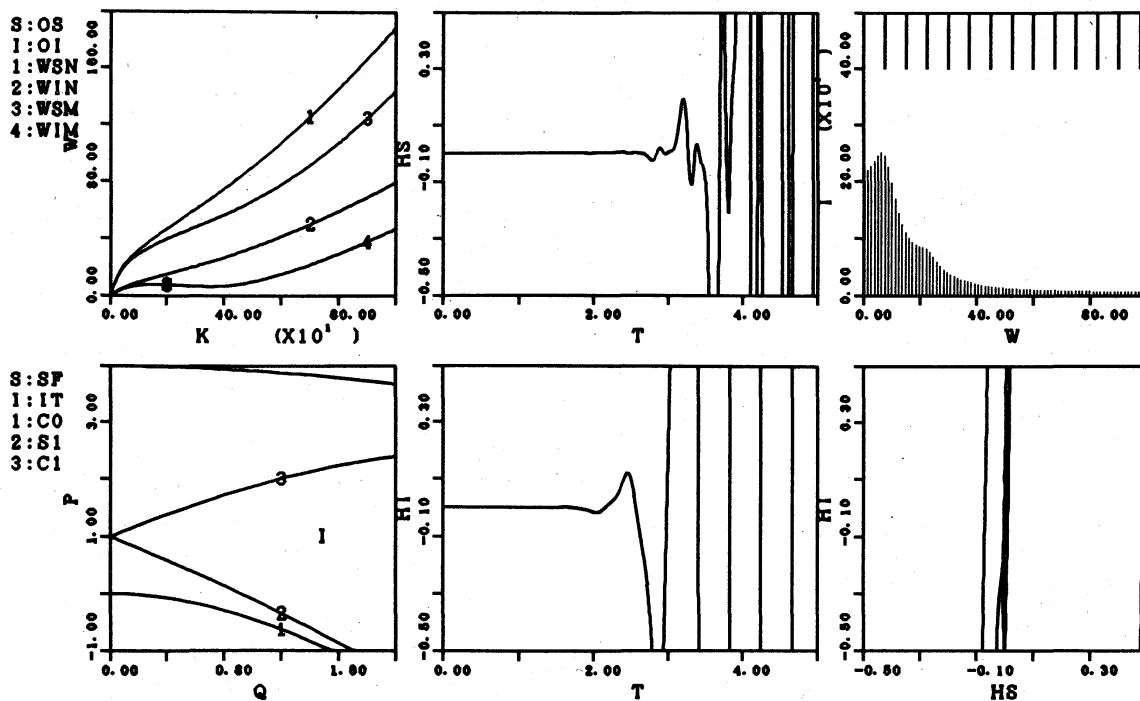


図 5: Normal Mode 方程式の数値解:  $\Omega = 7.5\text{s}^{-1}$

は大きくなる. また幅広いスペクトルが示すように, 不規則性も強くなる.

## 7 おわりに

二層磁性流体の表面振動と界面振動を相互作用も含めて記述する normal mode 方程式の性質を調べて数値解を求め, 交流磁場のもとでの解の性質を解析的に調べるため, これから結合 Mathieu 方程式を導いて安定性ダイアグラムを得た. 本稿の研究は現在, 数値実験や水槽実験に指針を与えたり, 結果を解析するために利用しているが, 更に非線形性, 磁場の非一様性, 磁場と重力の相互作用などを取り込んだり, 解析法の改良などを計画している.

## 参考文献

- [1] M.D.Cowley and R.E.Rosensweig: The Interfacial Stability of a Fer-

- romagnetic Fluid, J. Fluid. Mech., **30**, 671 (1967).
- [2] R.E.Zelazo and J.R.Melcher: Dynamics and Stability of Ferrofluids: Surface Interactions, J. Fluid. Mech., **39**, 1 (1969).
- [3] 大久保雅章, 石橋幸男, 大島修造, 山根隆一郎: 交流磁場における磁性流体界面の不安定性, 日本機械学会論文集 (B編), **55**, 2968 (1989).
- [4] 水田 洋: 表面と界面のある磁性流体の理論解析, 京都大学数理解析研究所講究録 830「流体における波動現象の数理とその応用」, 226 (1993) (式 (14) などの符号の訂正は, 本稿で済ませてある).
- [5] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press (1985).
- [6] N.W.McLachlan: *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press (1947).